

Преобразования Дарбу–Бэклунда

Общие определения

При работе с дифференциальными уравнениями широко используются различные преобразования переменных.

Во-первых, это точечные замены, то есть невырожденные преобразования зависимых и независимых переменных $(\tilde{x}, \tilde{u}) = A(x, u)$. Эти замены сохраняют порядок по производным, то есть, выражение данного порядка будет иметь такой же порядок и в новых переменных. (Если u скаляр, то точечные замены можно обобщить до контактных, включающих зависимость от первых производных и тоже сохраняющих порядок.)

Во-вторых, это дифференциальные подстановки, которые порядок не сохраняют. Они могут быть как обратимыми, так и необратимыми (например, преобразование Миуры).

В-третьих, это преобразования Бэклунда, которые являются необратимыми в обе стороны (правильнее было бы их называть соответствиями). Терминология немного размыта, но одно из общепринятых определений выглядит следующим образом.

Определение. Пусть $x = (x, y, \dots)$ обозначает набор независимых переменных (при преобразовании они не меняются). Уравнения

$$A(u, u_x, \dots, \tilde{u}, \tilde{u}_x, \dots) = 0, \quad B(u, u_x, \dots, \tilde{u}, \tilde{u}_x, \dots) = 0 \quad (1)$$

задают преобразование Бэклунда между уравнениями $F(u, u_x, \dots) = 0$, $G(\tilde{u}, \tilde{u}_x, \dots) = 0$, если результат исключения u из уравнений $A = B = F = 0$ в точности эквивалентен уравнению $G = 0$ и наоборот, при исключении $\tilde{u}$ из уравнений $A = B = G = 0$ возникает в точности уравнение $F = 0$.

Особенно интересен случай, когда уравнения для u и $\tilde{u}$ совпадают — тогда преобразование можно применять многократно, что важно при построении решений.

Пример (Бэклунд, 1883) Классическим примером служит следующее преобразование. Рассмотрим уравнения

$$\tilde{u}_x + u_x = 2\alpha \sin \frac{\tilde{u} - u}{2}, \quad \tilde{u}_y - u_y = \frac{2}{\alpha} \sin \frac{\tilde{u} + u}{2} \quad (2)$$

(x -часть и y -часть преобразования Бэклунда). Продифференцируем первое по y , второе по x , и заменим производные в правых частях в силу самих уравнений. Получим

$$\tilde{u}_{xy} + u_{xy} = 2 \cos \frac{\tilde{u} - u}{2} \sin \frac{\tilde{u} + u}{2}, \quad \tilde{u}_{xy} - u_{xy} = 2 \cos \frac{\tilde{u} + u}{2} \sin \frac{\tilde{u} - u}{2}.$$

Если взять разность, то переменные $\tilde{u}$ сокращаются. Наоборот, при сложении сокращаются u . В результате, мы получаем, что если переменные u и $\tilde{u}$ связаны соотношениями (2), то каждая из них удовлетворяет уравнению $\sin$ -Гордон:

$$u_{xy} = \sin u, \quad \tilde{u}_{xy} = \sin \tilde{u}$$

(здесь при исключении одной из переменных даже не требуется использовать уравнение для неё). Дальнейший разбор этого примера будет вынесен в задачи.

Часто к преобразованиям Бэклунда относят также обратимые дифференциальные подстановки, переводящие решения некоторого уравнения в решения этого же уравнения. Такие примеры у нас уже были в задачах 11 и 12: отображение

$$(u, v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v}) : \quad \tilde{u} = v, \quad \tilde{v} = \frac{v_x}{v} + u \quad \Leftrightarrow \quad u = \tilde{v} - \frac{\tilde{u}_x}{\tilde{u}}, \quad v = \tilde{u} \quad (3)$$

действует на решениях системы

$$u_t = -u_{xx} + (u^2 + 2uv)_x, \quad v_t = v_{xx} + (v^2 + 2uv)_x; \quad (4)$$

отображение

$$(u, v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v}) : \quad \tilde{u} = u_{xx} - \frac{u_x^2}{u} + u^2 v, \quad \tilde{v} = \frac{1}{u} \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{\tilde{v}}, \quad v = \tilde{v}_{xx} - \frac{\tilde{v}_x^2}{\tilde{v}} + \tilde{u} \tilde{v}^2 \quad (5)$$

действует на решениях системы

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2. \quad (6)$$

Переход к цепочкам

В приведенных примерах уравнения для u и $\tilde{u}$ совпадают, следовательно преобразование можно итерировать. Введем нумерацию так, что $\tilde{u}_n = u_{n+1}$. Легко видеть, что тогда преобразование (2) порождает пару цепочек

$$u_{n+1,x} + u_{n,x} = 2\alpha_n \sin \frac{u_{n+1} - u_n}{2}, \quad u_{n+1,y} - u_{n,y} = \frac{2}{\alpha_n} \sin \frac{u_{n+1} + u_n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

где α_n произвольные параметры, они не обязаны совпадать на каждом шаге.

Отображение (3) принимает вид

$$u_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = \frac{v_{n,x}}{v_n} + u_n$$

и из первого уравнения следует, что последовательности u_n и v_n это фактически один и тот же набор переменных, так что достаточно оставить только одну из них. Тогда второе уравнение превращается в цепочку Вольтерра, а саму систему можно переписать в виде ее симметрии:

$$u_{n,x} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad u_{n,t} = u_n(u_{n+1}(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n) - u_{n-1}(u_n + u_{n-1} + u_{n-2})). \quad (8)$$

Аналогично, отображение (5) принимает вид

$$u_{n+1} = u_{n,xx} - \frac{u_{n,x}^2}{u_n} + u_n^2 v_n, \quad v_{n+1} = \frac{1}{u_n},$$

что эквивалентно цепочке Тоды, если положить $u_n = e^{q_n}$, $v_n = e^{-q_{n-1}}$; система по t превращается в ее симметрию:

$$q_{n,xx} = e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n-q_{n-1}}, \quad q_{n,t} = q_{n,x}^2 + e^{q_{n+1}-q_n} + e^{q_n-q_{n-1}}. \quad (9)$$

Как видим, во всех трех примерах происходит следующее:

- было уравнение в частных производных с независимыми переменными (x, t) (или (x, y));
- вместо него возникла пара цепочек (дифференциально-разностных уравнений), в одной независимые переменные (n, x) , в другой (n, t) ;
- эта пара цепочек совместна друг с другом и каждая компонента их совместного решения удовлетворяет исходному уравнению в частных производных.

Таким образом, если мы каким-то образом научимся строить решение пары цепочек, то тем самым у нас будет построено и решение непрерывного уравнения. Можно сказать, что эта пара определяет для него дискретизацию.

Ранее мы видели, что цепочка Вольтерра служит дискретизацией для КдФ в смысле непрерывного предела, а сейчас мы видим, что она задает дискретизацию для другой системы (4) на уровне точного соответствия. Впрочем, КдФ не уйдет обиженным — для него тоже найдется цепочка, более того, мы разберем ее подробнее всего.

Преобразования Дарбу

Как мы знаем, для интегрируемых уравнений полезно рассматривать представление нулевой кривизны

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi \quad \Rightarrow \quad U_t = V_x + [V, U].$$

Если у уравнения имеется преобразование Бэклунда $U \mapsto \tilde{U}$, то мы имеем еще одну копию этих уравнений

$$\tilde{\Psi}_x = \tilde{U}\tilde{\Psi}, \quad \tilde{\Psi}_t = \tilde{V}\tilde{\Psi} \quad \Rightarrow \quad \tilde{U}_t = \tilde{V}_x + [\tilde{V}, \tilde{U}].$$

Естественно ожидать, что эти две копии как-то связаны. Преобразование $\Psi \mapsto \tilde{\Psi}$ задаётся уравнением вида

$$\tilde{\Psi} = A\Psi,$$

где матрица A может зависеть от динамических переменных $u, \tilde{u}$, а иногда и от некоторых вспомогательных переменных. Такие преобразования принято называть преобразованиями Дарбу. То есть, преобразование Дарбу — это преобразование линейного уравнения, переводящее его решения в решения уравнения такого же вида, но с новыми коэффициентами. А преобразование Бэклунда — это формулы, по которым пересчитываются коэффициенты. Иначе, можно сказать, что преобразование Дарбу это продолжение преобразования Бэклунда на ψ -функции. Однако, можно не задумываться о этих смысловых различиях и во всех случаях говорить «преобразования Дарбу–Бэклунда». Используется также термин *одевающее преобразование*, поскольку, как мы позже увидим, оно позволяет строить солитонные решения начиная с голого нуля.

Легко проверить, что условие совместности с исходными линейными задачами имеет вид

$$A_x = \tilde{U}A - AU, \quad A_t = \tilde{V}A - AV.$$

Если включить зависимость от n , то линейные задачи записываются так:

$$\Psi_{n,x} = U_n \Psi_n, \quad \Psi_{n,t} = V_n \Psi_n, \quad \Psi_{n+1} = A_n \Psi_n,$$

а их условия совместности принимают вид

$$U_{n,t} = V_{n,x} + [V_n, U_n], \quad A_{n,x} = U_{n+1} A_n - A_n U_n, \quad A_{n,t} = V_{n+1} A_n - A_n V_n. \quad (10)$$

Первое уравнение отвечает уравнению в частных производных, второе — x -части преобразования Бэклунда, третье — t -части.

Упражнение. Как мы уже знаем система (6) допускает представление нулевой кривизны с матрицами

$$U = \begin{pmatrix} \lambda/2 & u \\ -v & -\lambda/2 \end{pmatrix}, \quad V = \lambda U + \begin{pmatrix} uv & u_x \\ v_x & -uv \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что если навесить здесь n и взять матрицу A в виде

$$A_n = \begin{pmatrix} \lambda - q_{n,x} & e^{q_n} \\ -e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix},$$

то последние два уравнения (10) окажутся эквивалентными соотношениям $u_n = e^{q_n}$, $v_n = e^{-q_{n-1}}$ и цепочкам (9).

Перейдем теперь к нашему любимому примеру — КдФ. На этой лекции мы ограничимся выводом основных формул, а на следующей будем разбираться, как их применять для построения решений.

Преобразование Бэклунда для уравнения КдФ

Вывод преобразования

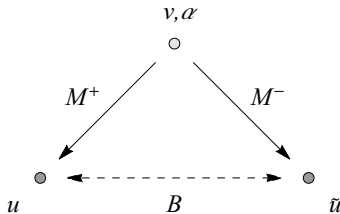
Довольно часто (хотя не всегда) преобразования Бэклунда получаются как композиция двух дифференциальных подстановок, действующих в разные стороны. Случай КдФ служит типичным примером. Как мы помним, имеется преобразование Миуры, отображающее решения мКдФ в решения КдФ:

$$M^+ : \quad v_t = v_{xxx} - 6(v^2 + \alpha)v_x \quad \xrightarrow{-u=v^2+v_x+\alpha} \quad u_t = u_{xxx} + 6uu_x.$$

Воспользуемся инвариантностью уравнения для v относительно замены $v \rightarrow -v$. Это даёт ещё одну подстановку между теми же уравнениями:

$$M^- : \quad v_t = v_{xxx} - 6(v^2 + \alpha)v_x \quad \xrightarrow{-\tilde{u}=v^2-v_x+\alpha} \quad \tilde{u}_t = \tilde{u}_{xxx} + 6\tilde{u}\tilde{u}_x.$$

Уравнения для u и $\tilde{u}$ совпадают, но сами решения разные.



Связь между u и $\tilde{u}$ и есть преобразование Бэклунда для КдФ. Это *неявное* преобразование. Если задано решение $u(x, t)$, то, чтобы получить $\tilde{u}(x, t)$, нужно сначала обратить M_α^+ , то есть, построить v как решение совместной пары ОДУ

$$v_x = -u - \alpha - v^2, \quad v_t = -u_{xx} + 2u_x v - 2(u - 2\alpha)(u + v^2 + \alpha), \quad (11)$$

(второе уравнение это мКдФ, в котором v_x, v_{xx} и v_{xxx} заменены через u), а потом найти $\tilde{u}$ по явным формулам при помощи M_α^- . Тут можно вспомнить, что ранее мы обращали M_λ^+ в виде ряда по $\sqrt{-\lambda}$. Это было полезно для вывода законов сохранения и симметрий, но в качестве настоящего решения этот формальный ряд не годится. Сейчас нам нужно решение в виде функции от x, t , при некотором конкретном числовом значении $\lambda = \alpha$.

В отличие от рассмотренных выше примеров, найденное преобразование содержит не только $u, \tilde{u}$, но и промежуточную переменную v . Покажем, что ее можно исключить и привести преобразование Бэклунда к виду (1). Имеем:

$$-u = v^2 + v_x + \alpha, \quad \tilde{u} = u + 2v_x. \quad (12)$$

Отсюда легко получить $2v^2 = -(u + \tilde{u} + 2\alpha)$ и подстановка во второе уравнение даёт

$$u_x + \tilde{u}_x = (u - \tilde{u})\sqrt{-2(u + \tilde{u} + 2\alpha)}. \quad (13)$$

Это x -часть преобразования Бэклунда. Ещё одно уравнение, t -часть, получается, если подставить v во второе уравнение (11) или непосредственно в уравнение мКдФ; это даст

$$u_t + \tilde{u}_t = (u_{xx} - \tilde{u}_{xx} + 3u^2 - 3\tilde{u}^2)\sqrt{-2(u + \tilde{u} + 2\alpha)}. \quad (14)$$

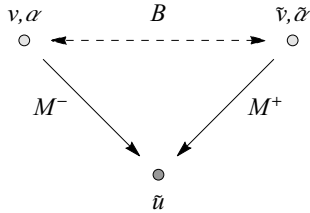
Перекрёстным дифференцированием несложно проверить, что отсюда следует

$$u_t - u_{xxx} - 6uu_x = \tilde{u}_t - \tilde{u}_{xxx} - 6\tilde{u}\tilde{u}_x,$$

то есть, если одна из переменных удовлетворяет КдФ, то это верно и для второй; кроме того, дифференцирование (13) в силу КдФ даёт тождество (является следствием (13) при дифференцировании по x).

Одевающаяся цепочка

Преобразование в виде (13) не особенно удобно из-за корня. Однако, мы можем взглянуть на картину и с другой стороны:



и вместо того, чтобы исключать v , исключить $\tilde{u}$ из соотношений

$$M^+ : -\tilde{u} = \tilde{v}^2 + \tilde{v}_x + \tilde{\alpha}, \quad M^- : -\tilde{u} = v^2 - v_x + \alpha,$$

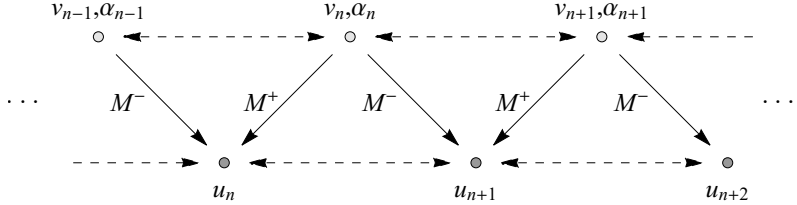
где параметр $\tilde{\alpha}$ выбирается независимо от α . Это даёт преобразование Бэклунда (точнее, его x -часть) между двумя уравнениями мКдФ с разными параметрами:

$$v_x + \tilde{v}_x = v^2 - \tilde{v}^2 + \alpha - \tilde{\alpha}. \quad (15)$$

$$v_t = v_{xxx} - 6(v^2 + \alpha)v_x, \quad \tilde{v}_t = \tilde{v}_{xxx} - 6(\tilde{v}^2 + \tilde{\alpha})\tilde{v}_x.$$

Так как мы собираемся применять преобразование многократно, то для нас нет принципиальной разницы между этими двумя диаграммами — они все равно склеиваются в одну общую последовательность. Это даёт последовательность переменных u_n, v_n , связанных следующими соотношениями с произвольными параметрами α_n :

$$-u_n = v_n^2 + v_{n,x} + \alpha_n, \quad -u_{n+1} = v_n^2 - v_{n,x} + \alpha_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$



Отсюда для v_n получается так называемая *одевающая цепочка*:

$$v_{n,x} + v_{n+1,x} = v_n^2 - v_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}. \quad (17)$$

Удобна также переменная q , определяемая по формулам

$$u_n = -2q_{n,x}, \quad v_n = q_n - q_{n+1}.$$

Постоянные интегрирования можно выбрать так, чтобы эта переменная удовлетворяла, при каждом n , потенциальному уравнению КдФ

$$q_t = q_{xxx} - 6q_x^2. \quad (18)$$

Соответствующая цепочка имеет вид

$$q_{n,x} + q_{n+1,x} = (q_n - q_{n+1})^2 + \alpha_n. \quad (19)$$

Преобразование Дарбу для оператора Шрёдингера

Покажем, что преобразование Дарбу для уравнения Шрёдингера

$$\psi_{xx} + (u + \lambda)\psi = 0 \quad (20)$$

имеет вид

$$\tilde{\psi} = \psi_x - v\psi, \quad (21)$$

то есть, эта замена переводит решения уравнения Шрёдингера с потенциалом $-u$ в решения такого же уравнения с потенциалом $-\tilde{u}$. Найдём условие совместности выписанных уравнений. Дифференцируя (21) и заменяя ψ_{xx} из (20), получаем

$$\tilde{\psi}_x = \psi_{xx} - v_x\psi - v\psi_x = -(u + v_x + \lambda)\psi - v\psi_x; \quad (22)$$

дифференцируя ещё раз, получаем

$$\tilde{\psi}_{xx} = (-u_x - v_{xx} + v(u + \lambda))\psi - (u + 2v_x + \lambda)\psi_x.$$

С другой стороны, должно быть

$$\tilde{\psi}_{xx} = -(\tilde{u} + \lambda)\tilde{\psi} = -(\tilde{u} + \lambda)(\psi_x - v\psi).$$

Сравнивая эти два равенства, получаем

$$\tilde{u} = u + 2v_x, \quad -u_x - v_{xx} + v(u - \tilde{u}) = 0.$$

Заменив во втором уравнении $u - \tilde{u} = -2v_x$ и проинтегрировав, получим

$$-u = v^2 + v_x + \alpha, \quad \tilde{u} = u + 2v_x,$$

что и есть преобразование Бэклунда (точнее, его x -часть) в виде (12). Преобразование Дарбу, является, таким образом, расширением этого преобразования на волновые функции, которые пересчитываются по формуле (21). Кроме того, линеаризация преобразования Миуры подстановкой $v = \phi_x / \phi$, приводит к уравнению $\phi_{xx} = -(u + \alpha)\phi$, то есть, для того чтобы осуществить преобразование Дарбу, достаточно иметь частное решение уравнения Шрёдингера при частном значении спектрального параметра $\lambda = \alpha$. Преобразования $u \rightarrow \tilde{u}$ и $\tilde{u} \rightarrow u$ отличаются только сменой знака v . На решениях уравнения Шрёдингера, действие обратного преобразования Дарбу имеет вид

$$\psi = \frac{1}{\alpha - \lambda}(\tilde{\psi}_x + v\tilde{\psi}), \quad (23)$$

это уравнение легко получается из (21) и (22).

Записывая преобразование в матричном виде и навешивая индекс n , получаем представление нулевой кривизны для одевающей цепочки:

$$\Psi_{n,x} = U_n \Psi_n, \quad \Psi_{n+1} = A_n \Psi_n,$$

где

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_n - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} -v_n & 1 \\ v_n^2 + \alpha_n - \lambda & -v_n \end{pmatrix}, \quad \Psi_n = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n,x} \end{pmatrix}$$

(вторая строка A_n получается из (22), если заменить там $-u = v^2 + v_x + \alpha$).

Упражнение. Проверьте прямым вычислением, что уравнение $A_{n,x} = U_{n+1}A_n - A_nU_n$ эквивалентно соотношениям

$$-u_n = v_n^2 + v_{n,x} + \alpha_n, \quad u_{n+1} = u_n + 2v_{n,x}.$$

История преобразований Дарбу–Бэклунда началась задолго до возникновения теории солитонов. Само уравнение $\sin$ -Гордон и преобразование Бэклунда были открыты в дифференциальной геометрии, где они описывают некоторый класс поверхностей с гауссовой кривизной равной -1 и их преобразования [1, 2]. Связь этих результатов с интегрируемыми уравнениями была установлена лишь 100 лет спустя, в начале 1970-х [3]. Это далеко не единственный пример такой связи, см. например учебники [4, 5], где вся теория интегрируемости обсуждается с геометрическим уклоном. Преобразования Дарбу для линейных дифференциальных уравнений описаны в [6]. Позже их переоткрыл Шрёдингер, как очень удобный инструмент построения точно-решаемых потенциалов в одномерной квантовой механике [7, 8]. К уравнению КдФ они также были приспособлены в 70-х [9], после того как было установлено, что уравнение Шрёдингера служит вспомогательным линейным уравнением для КдФ.

-
- [1] E. Bour. Théorie de la déformation des surfaces. *J. l'École Imp. Polytech.* **19:39** (1862) 1–48.
 - [2] A.V. Bäcklund. Om ytor med konstant negativ krökning. *Lunds Universitets Årsskrift* **19** (1883) 1–48.
 - [3] G.L. Lamb, jr. Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. *Rev. Mod. Phys.* **43:2** (1971) 99–124.
 - [4] C. Rogers, W.K. Schief. Bäcklund and Darboux transformations. Geometry and modern applications in soliton theory. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
 - [5] А.И. Бобенко, Ю.Б. Сурис. Дискретная дифференциальная геометрия. Интегрируемая структура. Ижевск, РХД, 2010.
 - [6] G. Darboux. Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. 2 ed., Paris: Gauthier-Villars, 1910.

- [7] E. Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad.* **A 46** (1940/1941) [9–16](#). [перевод: Э. Шредингер, Избранные труды по квантовой механике, М.: Наука, 1976]
- [8] L. Infeld, T.E. Hull. The factorization method. *Rev. Modern Phys.* **23:1** (1951) [21–68](#). [сб. переводов “Математика” **10:3** (1966) 39]
- [9] H.D. Wahlquist, F.B. Estabrook. Bäcklund transformations for solutions of the Korteweg–de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.* **31:23** (1973) [1386–1390](#).